Concours 2001 : corrigé de l'exercice 1

QUADRILATÈRES CONVEXES CIRCONSCRITS À UN CERCLE

I. Etude des tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

1. Soit $M(\cos t, \sin t)$. $OM^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $M \in (\mathcal{C})$.
Réciproquement soit M un point de $(\mathcal{C})$ et soit θ la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Alors les coordonnées de M sont par définition $(\cos t, \sin t)$.
Donc $(\mathcal{C}) = \{ M(\cos t, \sin t)\ , t \in]-\pi;\pi] \}$

2. $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ est un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ en M ; l'équation de la tangente est :

$$\begin{vmatrix} x - \cos t & -\sin t \\ y - \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{x\cos t + y \sin t - 1 = 0}$$

On remarque que : $\overrightarrow{OM} . \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 0$. Donc la tangente est perpendiculaire en M à la droite (OM).

3. - On suppose que $q = 0$.
Pour qu'une tangente à $(\mathcal{C})$ passe par Q il faut et il suffit qu'il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que : $p\cos t = 1$.
Si $|p| < 1$ il n'existe aucune valeur de t
Si $|p| = 1$ on obtient une valeur de t ($t = 0$ ou $t = \pi$)
Si $|p| > 1$ il existe deux valeurs de t convenant
   - On suppose que $q \neq 0$.
On peut se ramener au cas précédent par une rotation de centre O. En conclusion :
Si $p^2 + q^2 < 1$ il n'y a pas de tangente passant par Q.
Si $p^2 + q^2 = 1$ une seule tangente passe par Q.
Si $p^2 + q^2 > 1$ il existe deux tangentes passant par Q.
   - construction des tangentes passant par Q.
Si $OQ > 1$ on construit le milieu du segment $[OQ]$ et on trace le cercle de diamètre $[OQ]$. Soient A et B les points d'intersection des deux cercles. Comme $[OQ]$ est un diamètre les triangles OQA et OQB sont rectangles en A et B. Les points d'intersection de ce cercle avec $(\mathcal{C})$ sont donc les points de contact des tangentes issues de Q avec le cercle.
Si $OQ = 1$ la tangente est la droite passant par Q et perpendiculaire à $[OQ]$!

4. Cette question peut être résolue par le calcul ou géométriquement.
   - *solution analytique* :
Si un point $Q(p, q)$ du plan convient, il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases} p\cos\theta + q\sin\theta = 1 \\ -p\sin\theta + q\cos\theta = 1 \end{cases}$$

On élève au carré les deux égalités et on les ajoute membre à membre. On obtient : $p^2 + q^2 = 2$.
Réciproquement supposons que Q est tel que : $p^2 + q^2 = 2$.
D'après la question précédente il existe deux tangentes à $(\mathcal{C})$ issues de Q. Donc il existe deux réels θ_1 et θ_2 tels que :

$$\begin{cases} p\cos\theta_1 + q\sin\theta_1 = 1 \\ p\cos\theta_2 + q\sin\theta_2 = 1 \end{cases}$$

les deux tangentes sont distinctes donc : $\theta_2 - \theta_1 \neq 0\ (\pi)$
On effectue la résolution du système :

$$p = \frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \qquad q = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

On en déduit : $p^2 + q^2 = 1 + \tan^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$. Par suite :

$$p^2 + q^2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\pi}{4}\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On obtient : $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$
ce qui signifie que les deux tangentes sont perpendiculaires.

- *solution géométrique* :
On commence par remarquer que pour le point qui correspond à $p = 1$ et $q = 1$ c'est vrai et par rotation pour tout point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
Réciproquement, si les tangentes issues de Q sont perpendiculaires et si on note T et T' les points de contact avec $(\mathcal{C})$, le quadrilatère $OTQT'$ est alors un carré dont le côté mesure 1. Par conséquent $OQ = \sqrt{2}$.
En conclusion l'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

II. Etude de parallélogrammes circonscrits à $(\mathcal{C})$

1. Soit $ABCD$ un losange quelconque de centre O. Si un cercle convient son centre se trouve sur les bissectrices des angles du losange. C'est donc le point O et son rayon est égal à la distance de O à $[AB]$. Inversement le cercle défini ainsi convient.

2. (a) Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan. Les bissectrices intérieures issues des sommets A et Bont pour vecteurs directeurs :

$$\vec{u} = \frac{AB}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} \qquad \vec{V} = \frac{BA}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

On sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. donc :

$$\vec{V} = \frac{AD}{\|\overrightarrow{AD}\|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

On calcule le produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = 1 - 1 = 0$.
Donc les deux bissectrices intérieures considérées sont perpendiculaires.

(b) Le point Ω est équidistant des demi-droites $(A, \overrightarrow{AB})$ et $(A, \overrightarrow{AD})$. Donc il appartient à la bissectrice intérieure issue de A. Même raisonnement pour les trois autres sommets.

(c) Si le parallélogramme $ABCD$ est circonscrit à un cercle de centre Ω alors les droites (ΩA), (ΩB), (ΩC), (ΩD) sont perpendiculaires. On en déduit que Ω est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et que ces diagonales sont perpendiculaires. Donc $ABCD$ est un losange de centre Ω.

3. (a) On peut supposer que le point A appartient à l'axe des abscisses et que son abscisse est strictement supérieure à 1. Nécessairement les points B et D sont les intersections avec l'axe des ordonnées des tangentes issues de A au cercle, l'ordonnée de B étant positive. Le point C est le symétrique de A par rapport à O. Inversement le parallélogramme ainsi construit convient car par symétrie $[CB]$ et $[CD]$ sont aussi tangentes au cercle.
Pour réaliser la construction géométrique on utilise le cercle de diamètre $[OA]$ pour obtenir les points de contact de $[AB]$ et $[AD]$ avec le cercle.

(b) Pour que $ABCD$ soit un carré circonscrit à $(\mathcal{C})$ il faut et il suffit que les tangentes au cercle issues de A soient perpendiculaires. D'après la question I.4 l'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. (a) Soit H le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.
L'aire du losange $ABCD$ est : $\mathcal{A} = 4 \times \frac{1}{2} OH \times AB = 2AB$.

(b) Réciproquement si l'aire du losange vaut $2AB$ alors $OH = 1$ et par suite $ABCD$ est circonscrit à $(\mathcal{C})$.

5. (a) Le triangle OAB est rectangle en O. Donc : $AH.BH = OH^2$. Comme $OH = 1$ on a : $AH.BH = 1$

(b) Démontrons que : $M \in [AB] \Longleftrightarrow MA + MB = AB$:
$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.
On élève au carré :
$MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = AB^2$
M appartient à $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.
Par suite :
M appartient à $[AB]$ si et seulement si : $MA^2 + MB^2 + 2MA.MB = AB^2$
Ce qui est équivalent à : $MA + MB = AB$.

(c) Comme f est impaire on se limite à $x > 0$. La fonction est dérivable.

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

(d) On sait que l'aire de $ABCD$ est $2AB$.
On suppose que A se déplace sur l'axe des abscisses et on pose : $OA = x$ avec : $x > 1$
Comme H est entre A et B on a :

$$AB = AH + HB = AH + \frac{1}{AH} = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(\sqrt{x^2 - 1})$$

L'étude de f montre que AB est minimum si : $\sqrt{x^2 - 1} = 1$
En élevant au carré on trouve : $x = \sqrt{2}$.
Le lieu cherché est donc le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

6. (a) Le triangle OAB est rectangle. On a donc la relation :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2}$$

On sait que : $OH = 1$; on en déduit que :

$$OA^2 + OB^2 = OA^2.OB^2$$

(b) La relation : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ exprime que B appartient à la demi-droite image de $]OA)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$$OB^2(OA^2 - 1) = OA^2$$

On sait que $OA > 1$. Donc : $OB = \dfrac{OA}{\sqrt{OA^2 - 1}}$

Cette relation détermine la position de B sur la demi-droite précédente.

(c)

$$OA = k \quad \Longrightarrow \quad OB = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Donc B appartient au cercle de centre O et de rayon $\dfrac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Donc, lorsque A décrit le cercle de centre O et de rayon k , le point B décrit le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$

(d) Soit $t > 1$. L'ensemble $(\mathcal{E})$ est formé par deux droites parallèles à l'axe des ordonnées. Les coordonnées de A sont $(t, t\tan u)$. On obtient les coordonnées de B en utilisant les relations de la question 6.b :

$$B\left(-\sqrt{\frac{t^2}{t^2 - \cos^2 u}}\sin u\ ,\ \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - \cos^2 u}}\cos u\right)$$

Les changements de paramètre : $u \longmapsto -u$ et $u \longmapsto \pi - u$ donnent les propriétés de symétrie par rapport aux axes de coordonnées.

$$x^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) y^2 = \left(\frac{1}{t^2 - \cos^2 u}\right)\left(t^2 \sin^2 u + (t^2 - 1)\cos^2 u\right) = 1$$

Le lieu de B est l'ellipse d'équation :

$$\boxed{x^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) y^2 = 1}$$

privée des points de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ car $u \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $u \neq -\dfrac{\pi}{2}$.

CAPES INTERNE DE MATHEMATIQUES SESSION 2001
ELEMENTS DE SOLUTION

EXERCICE 2

I. Préliminaires

1. $F(A_1)$ est la probabilité que le point M se trouve en A à l'instant n. Comme on sait qu'à l'instant 0 le point se trouve en A, on a d'après les données du texte :

$$F(A_1) = r \quad F(B_1) = p \quad F(C_1) = q$$

2. A l'instant n, le point M se trouve soit en A, soit en B, soit en C. L'union de ces trois évènements incompatibles est égale à l'univers, et donc on a bien pour tout entier naturel n :

$$F(A_n) + F(B_n) + F(C_n) = 1$$

   (a) Les évènements A_n, B_n et C_n forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totale s'applique, et on obtient :

$$\begin{gathered} a_{n+1} = F(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1}) \\ = p(A_n) \times p(A_{n+1}/A_n) + p(B_n) \times p(A_{n+1}/B_n) + p(C_n) \times p(A_{n+1}/C_n) \\ = a_n \times r + b_n \times q + c_n \times p \end{gathered}$$

   Le même raisonnement fournit les deux autres résultats. On a donc pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} &= pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} &= qa_n + pb_n + rc_n \end{aligned}$$

3. Connaissant $a_1 = r$, $b_1 = p$ et $c_1 = q$, on trouve

$$a_2 = r^2 + 2pq \quad b_2 = 2pr + q^2 \quad c_2 = 2qr + p^2$$

4. Etudions les cas particuliers suivants :

   (a) $r = 1$ (d'où $p = q = 0$). Il vient en reportant dans le système obtenu à la question 3.

$$a_{n+1} = a_n \quad b_{n+1} = b_n \quad c_{n+1} = c_n$$

   Ces égalités sont valables pour tout entier n, ce qui prouve que le point M est immobile.

(b) p= 1 (d'où $q = r = 0$). On obtient

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = c_n & b_{n+1} = a_n & c_{n+1} = b_n \\ a_{n+2} = b_n & b_{n+2} = c_n & c_{n+2} = a_n \\ a_{n+3} = a_n & b_{n+3} = b_n & c_{n+3} = c_n \end{array}$$

On en déduit que le point M décrit dans l'ordre les différents sommets : A, B, C, A, ...

(c) $p = q = r (= \frac{1}{3})$. On obtient

$$a_{n+1} = b_{n+1} = c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

d'où

$$a_n = b_n = c_n = \frac{1}{3}$$

Le point M est donc situé de manière équiprobable sur chacun des sommets.

II) Etude du cas $p = q$

A) On se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$)

1. Dans ce cas, on a les égalités suivantes, obtenues à partir de la question I) 3) :

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2} \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

On a alors les égalités pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = -\frac{1}{2} u_n$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On démontre de même que (v_n) et (w_n) sont aussi deux suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

2. On a $u_0 = a_0 - b_0 = 1$, et pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On trouve de même :

$$v_n = 0 \quad w_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On remarque évidemment que la suite (v_n) est nulle.

3. On a pour tout entier n :

$$a_{n+1} + a_n = \frac{b_n + c_n}{2} + a_n$$

tandis que

$$2a_{n+2} = 2\left(\frac{b_{n+1} + c_{n+1}}{2}\right) = \frac{a_n + c_n}{2} + \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n + c_n}{2} + a_n$$

ce qui prouve bien l'égalité demandée.

4. On suppose que r est non nul. Dans ce cas, r est solution de l'équation

$$2r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \Leftrightarrow 2r^2 = r+1 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2}$$

On obtient le même résultat pour s. Dans ce cas, la suite (a_n) a pour expression :

$$a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \alpha + \beta \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ permettent facilement de déterminer α et β, d'où

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

De la relation

$$b_n = a_n - u_n$$

on obtient alors :

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et enfin comme $v_n = 0$, on a $c_n = b_n$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

Au bout d'un grand nombre de tours, le point M se répartit de manière équiprobable sur un des trois points du triangle.

B. Généralisation.

Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. On se place dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1-2p$) et on généralise l'étude faite ci-dessus, en utilisant les mêmes notations.

1. En reprenant le raisonnement effectué précédemment :

$$\begin{gathered} u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} \\ = (ra_n + qb_n + pc_n) - (pa_n + rb_n + qc_n) \\ = (r-p)a_n + (q-r)b_n + (p-q)c_n \\ = (1-3p)(a_n - b_n) \\ = (1-3p)u_n \end{gathered}$$

car

$$\begin{gathered} r - p = (1-2p) - p = 1-3p \\ q - r = p - r = 3p - 1 \\ p - q = 0 \end{gathered}$$

On a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $(1-3p)$. Le même calcul établit que (v_n) et (w_n) sont aussi géométriques avec la même raison.

2. On en déduit comme précédemment que pour tout entier n :

$$u_n = (1-3p)^n \quad v_n = 0 \quad w_n = -(1-3p)^n$$

La suite (v_n) est la suite nulle.

3. Pour tout entier naturel n, on a:

$$\begin{gathered}(p+2r)\,a_{n+1} + \left(2p^2 - pr - r^2\right) a_n = (p+2r)\,(ra_n + qb_n + pc_n) + \left(2p^2 - pr - r^2\right) a_n \\ = \left(2p^2 + r^2\right) a_n + (pq + 2rq)\,b_n + \left(p^2 + 2rp\right) c_n\end{gathered}$$

On a aussi :

$$\begin{gathered}a_{n+2} = ra_{n+1} + qb_{n+1} + pc_{n+1} \\ = r\,(ra_n + qb_n + pc_n) + q\,(pa_n + rb_n + qc_n) + p\,(qa_n + pb_n + rc_n) \\ = \left(r^2 + 2pq\right) a_n + \left(2rq + p^2\right) b_n + \left(2rp + q^2\right) c_n \\ = \left(r^2 + 2p^2\right) a_n + (2rq + pq)\,b_n + \left(2rp + p^2\right) c_n\end{gathered}$$

sachant que $p = q$. On a donc bien établi l'égalité demandée.

4. La suite (a_n) s'écrit donc :

$$a_n = \alpha r^n + \beta s^n$$

où r et s vérifient l'équation du second degré :

$$X^2 = (p+2r)\,X + \left(2p^2 - pr - r^2\right)$$

dont les solutions sont 1 et $(1-3p)$. Pour tout entier n, on a alors

$$a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times (1-3p)^n$$

Les conditions initiales

$$a_0 = 1 \quad a_1 = r$$

permettent de trouver :

$$\alpha = \frac{r+3p-1}{3p} = \frac{(1-2p)+3p-1}{3p} = \frac{1}{3}$$

$$\beta = \frac{1-r}{3p} = \frac{1-(1-2p)}{3p} = \frac{2}{3}$$

On en déduit donc :

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (1-3p)^n \quad b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (1-3p)^n$$

Comme

$$0 < p \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 3p \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 1-3p < 1$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} (1-3p)^n = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

On retrouve dans le cas général la conclusion que nous avions trouvée à la question 4 de la partie A.

III. Etude du cas général

1. (a) Calculons simplement le déterminant de ces trois vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3j^2 - 2j - j^4 = 3\left(j^2 - j\right) \neq 0$$

car $j^3 = 1$ et donc $j^4 = j$. Comme ce déterminant est non nul, ces trois vecteurs forment une base de C^3.

(b) Calculons la matrice de $\Phi(u)$:

$$\begin{bmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+q+p \\ r+q+p \\ r+q+p \end{bmatrix} = (r+q+p) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui prouve bien l'égalité $\Phi(u) = u$. De même, $\Phi(v)$ a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+jq+j^2p \\ rj+qj^2+p \\ rj^2+q+pj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+jq+j^2p \\ j\left(r+jq+j^2p\right) \\ j^2\left(r+jq+j^2p\right) \end{bmatrix} = \left(r+jq+j^2p\right) \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix}$$

ce qui prouve bien que $\Phi(v) = \lambda v$. On prouve de mêm que $\Phi(w) = \mu w$.

(c) On a :

$$|\lambda| \leq \left|r+jq+j^2p\right| \leq |r| + |j| \times |q| + |j|^2 \times |p|$$

Or, on sait que $|j| = 1$, donc

$$|\lambda| \leq r+q+p \leq 1$$

De même pour μ. Calculons $|\lambda|^2$:

$$\begin{aligned} \left|r+jq+j^2p\right|^2 &= \left|r+\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)q+\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 p\right|^2 \\ &= \left|\left(r-\tfrac{q}{2}-\tfrac{p}{2}\right)+i\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(q-p)\right|^2 \\ &= \left(r-\tfrac{q}{2}-\tfrac{p}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}(q-p)^2 \\ &= r^2+q^2+p^2-rq-rp-pq \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que

$$r+p+q=1 \Rightarrow (r+p+q)^2 = 1 \Rightarrow r^2+p^2+q^2 = 1-2pq-2pr-2qr$$

On en déduit que l'égalité $|\lambda| = 1$ a lieu si et seulement si :

$$1 = (1 - 2pq - 2pr - 2qr) - rq - rp - pq \Leftrightarrow pq + pr + qr = 0$$

Comme les trois réels p, q et r sont positifs, cette égalité est vérifiée si et seulement si

$$pq = pr = qr = 0$$

Deux cas sont alors possibles :
Soit $p = r = 0$ et $q = 1$, d'où $\lambda = j$ et $\mu = j^2$
Soit $q = r = 0$ et $p = 1$, d'où $\lambda = j^2$ et $\mu = j$.

2. Désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On a par définition :

$$\begin{gathered} V_0 = x_0 u + y_0 v + z_0 w \\ = x_0 (e_1 + e_2 + e_3) + y_0 \left(e_1 + j e_2 + j^2 e_3\right) + z_0 \left(e_1 + j^2 e_2 + j e_3\right) \end{gathered}$$

Comme $V_0\,(1,0,0)$ dans la base canonique, l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base permet d'obtenir le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ x_0 + j y_0 + j^2 z_0 = 0 \\ x_0 + j^2 y_0 + j z_0 = 0 \end{array} \right.$$

On résout ce système avec les formules de Cramer. Le déterminant du sytème a déjà été calculé à la question 1, et sa valeur est $3\left(j^2 - j\right)$. On a alors :

$$x_0 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j & j^2 \\ 0 & j^2 & j \end{array} \right|}{3\,(j^2 - j)} = \frac{j^2 - j^4}{3\,(j^2 - j)} = \frac{j^2 - j}{3\,(j^2 - j)} = \frac{1}{3}$$

On trouve de même $y_0 = \frac{1}{3}$ et $z_0 = \frac{1}{3}$.

3. Une récurrence immédiate fournit $V_n = \Phi^n (V_0)$. Or, dans la base (u, v, w), la matrice de Φ est égale à

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right]$$

donc celle de Φ^n dans cette même base est égale à

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{array} \right]$$

Le vecteur V_n a donc pour coordonnées dans cette base :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda^n}{3} \\ \frac{\mu^n}{3} \end{array} \right]$$

On en déduit les coordonnées de V_n dans la base canonique en utilisant la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda^n}{3} \\ \frac{\mu^n}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{\lambda^n}{3}+\frac{\mu^n}{3} \\ \frac{1}{3}+j\frac{\lambda^n}{3}+j^2\frac{\mu^n}{3} \\ \frac{1}{3}+j^2\frac{\lambda^n}{3}+j\frac{\mu^n}{3} \end{bmatrix}$$

soit les égalités :

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{3}+\tfrac{\lambda^n}{3}+\tfrac{\mu^n}{3} \\ b_n &= \tfrac{1}{3}+j\tfrac{\lambda^n}{3}+j^2\tfrac{\mu^n}{3} \\ c_n &= \tfrac{1}{3}+j^2\tfrac{\lambda^n}{3}+j\tfrac{\mu^n}{3} \end{aligned}$$

4. Dans le cas où $|\lambda|<1$ et $|\mu|<1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

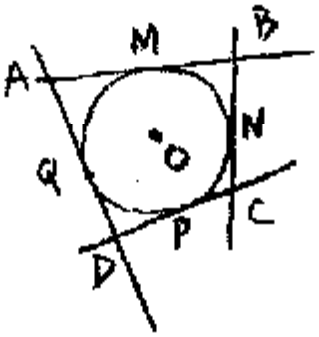
On retrouve les conclusions de la question II) B) 4. Dans le cas où $|\lambda|=1$, on a $\lambda = j$ et $\mu = j^2$, et on retrouve les cas particuliers étudiés dans la partie I..

QUADRILATERES CONVEXES CIRCONSCRITS A UN CERCLE

corrigé des parties III et IV

IV

1.



a. Si M, N, P, Q sont les points de contact de [AB], [BC], [CD], [DA] avec (C), on a

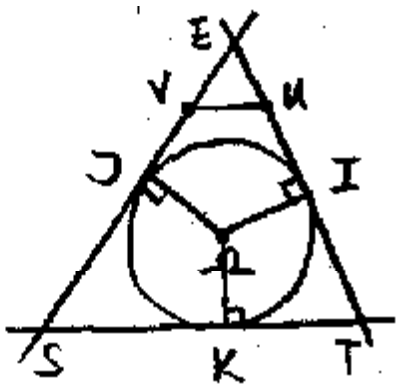
$$\left.\begin{array}{l} AM = AQ \\ BM = BN \\ CN = CP \\ DP = DQ \end{array}\right\} \text{ d'où } AM + BM + CP + DP = AQ + DQ + CN + BN$$

c-à-d $AB + CD = AC + BD$

b. O étant le centre de (C), OM, ON, OP, OQ sont les hauteurs des triangles OAB, OBC, OCD, ODA.

$$\mathcal{A} = \text{aire}(OAB) + \text{aire}(OBC) + \text{aire}(OCD) + \text{aire}(ODA)$$
$$= \frac{1}{2} AB \cdot OM + \frac{1}{2} BC \cdot ON + \frac{1}{2} CD \cdot OP + \frac{1}{2} DA \cdot OQ$$
$$= \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DA) \times 1$$
$$= AB + CD = AD + BC$$

2.



Soit K le projeté orthogonal de Ω sur (ST).

Les angles $\widehat{TS\Omega}$ et $\widehat{ST\Omega}$ ont une somme inférieure à $\frac{D}{2}$ (c'est la moitié de $\widehat{TSE} + \widehat{STE}$) donc sont

aigus tous les deux. D'où $K \in [ST]$. De même $I \in [ET]$

a. Si $U \in [TI]$ et $V \in [SJ]$ $\quad J \in [ES]$

$TU \leqslant TI$ et $SV \leqslant SJ$

d'où $TU + SV \leqslant TI + SJ = TK + SK = TS$

d'où $TU + SV < ST + UV$

car $U \neq V$ et $UV > 0$

b. $SV = SJ + JV$, $TU = TI - IU$,

d'où $SV + TU = SJ + TI + JV - IU$

$= ST + JV - IU$

Donc $ST + JV - IU = UV + ST$

d'où $JV = IU + UV \geqslant VI$ par l'inégalité triangulaire.

Mais $\Omega J = \Omega I$, $EJ = EI$,

ce qui montre que la médiatrice de $[IJ]$ est (ΩE).

Comme $V \in [EJ[$, $VJ \leqslant VI$.

On en tire $VJ = VI$. V est le point de $[EJ[$ sur (ΩE), donc $V = E$

$ST + UV = TU + SV$ devient

$ST + UE = TU + SE$

$SJ + TI + UE = TI + UI + SJ + JE$

$UE = UI + JE$

$UE + UI = 2UI + JE$

$IE = 2UI + JE$

$2UI = 0$ ✱

c. On a donc, par exclusion des autres cas,
$J \in [SV]$ et $[I \in TU]$

d. Si $V = J$

$ST + UV = SV + TU$ devient $ST + JU = SJ + TU$

$\Leftrightarrow SJ + IT + JU = SJ + IT + IU$

$\Leftrightarrow JU = IU$

$\Leftrightarrow U = E$ (déjà vu)

Inversement, si $U = E$, alors

$ST + UV = SV + TU$ devient $ST + EV = SV + TE$,

et comme (cf ci-dessus) $ST + JE = SJ + TE$,

on a $JE - EV = SJ - SV$

Soit $JV = -JV$, donc $JV = 0$ et $V = J$

On a donc $V = J \Leftrightarrow U = E$,

De même $U = I \Leftrightarrow V = E$

Dans chacun de ces cas limite, le quadrilatère STUV est alors tel que deux de ses côtés consécutifs sont alignés. Il est donc convexe.

Si $V \in]EJ[$ et $U \in]EI[$

Dans le triangle STE, S et E sont de part et d'autre de (TV), puisque [SE] coupe (TV) en V.

Comme T est sur (TV), et que E n'est pas sur (TV), et que $U \in]TE[$, U et E sont du même

côté de (TV)

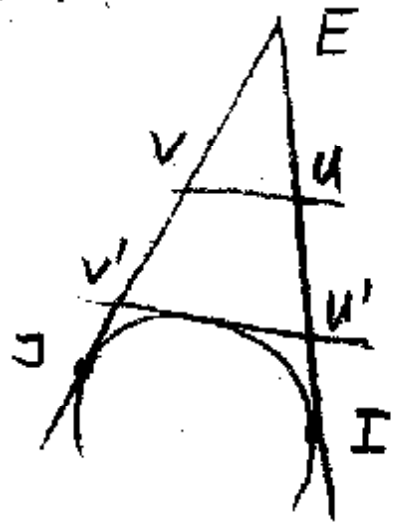
U et S sont donc de part et d'autre de (TV).

De la même façon, T et V sont de part et d'autre de (US). Les droites (US) et (TV) sont donc sécantes en un point de]US[et de]TV[, ce qui montre que STUV est convexe.

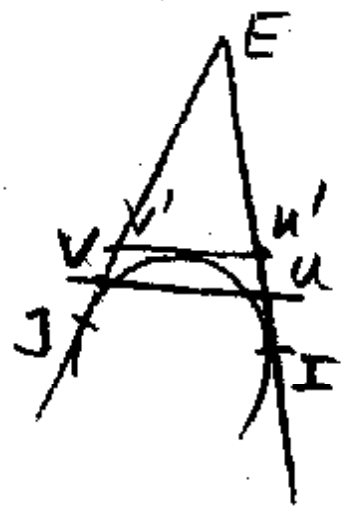
Ω est à l'intérieur (résultat connu) du triangle IJK. Comme ce triangle, par la convexité de STUV, est à l'intérieur de STUV, on a que Ω est intérieur à STUV.

e. Soit R le rayon du cercle inscrit dans le triangle UST, et la distance de Ω à (UV).

Soit (U'V') la tangente au cercle, parallèle à (UV), passant entre E et Ω, et telle que $V' \in]EJ[$, $U' \in]EI[$



Cas 1.



Cas 2.

Comme $STu'v'$ est circonscrit à un cercle, on a : $ST + u'v' = Sv' + Tu'$

Comme d'autre part $ST + uv = Sv + Tu$

on a $|u'v' - uv| = uu' + vv'$

Si $u'v' - uv = uu' + vv'$

$u'v' = u'u + uv + vv'$

impossible si les points u, u', v, v' ne sont pas alignés. Donc $u = u'$, $v = v'$

de même si $uv - u'v' = uu' + vv'$.

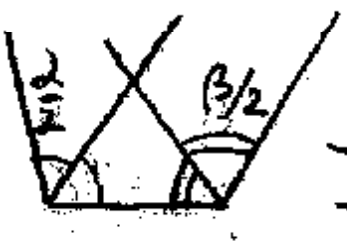
Donc la droite uv est bien tangente au cercle inscrit dans EST.

3. En vertu de 2, un tel quadrilatère est un certain cercle de rayon R.

Comme l'aire de ABCD est alors $R(AB + CD) = R(AD + BC)$, on a que $R = 1$.

Le cercle (Γ) est égal à (C_G) ssi son centre est O, c-à-d ssi les bissectrices intérieures de deux sommets consécutifs (facilement écartés) se coupent en O. [$0 < \alpha + \beta < 2\pi$

$\Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < \pi$



]

IV

1. a. On sait que si (D) et (D') sont deux droites parallèles, et si $\vec{u}$ est tel que $D' = t_{\vec{u}}(D)$, alors $S_{D'} \circ S_D = t_{2\vec{u}}$.

(dem. facile en considérant les milieux H de MM' et H' de $M'M''$, qd $M \xmapsto{S_D} M' \xmapsto{S_{D'}} M''$

Si maintenant D est une droite et $\vec{u}$ un vecteur $\perp$ à D, on considère $D' = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(D)$

alors $S_{D'} \circ S_D = t_{\vec{u}}$

et $t_{\vec{u}} \circ S_D = (S_{D'} \circ S_D) \circ S_D = S_{D'}$

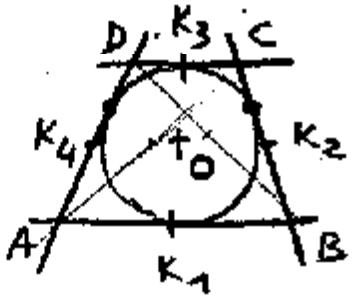
Avec $D'' = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(D)$, on obtient

$S_D \circ S_{D''} = t_{\vec{u}}$

et $S_D \circ t_{\vec{u}} = S_D \circ (S_D \circ S_{D''}) = S_{D''}$.

Dans les deux cas, la transformation en question est une réflexion, d'axe translaté de la précédente, par $t_{\frac{\vec{u}}{2}}$ ou $t_{-\frac{\vec{u}}{2}}$ suivant l'ordre de la composition.

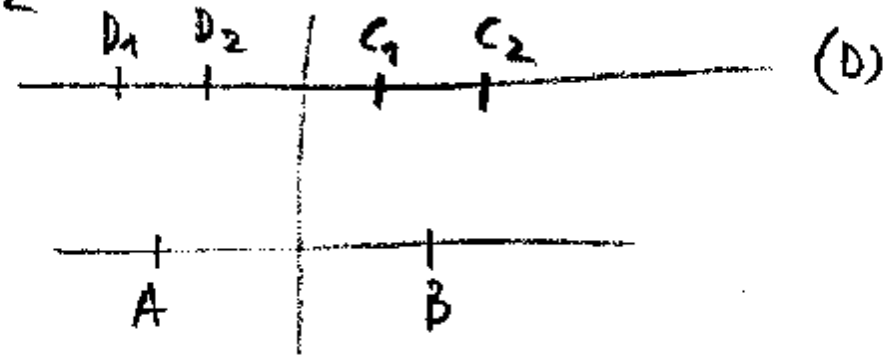
b.



Montrons qu'un trapèze isocèle ABCD, de bases AB et CD, possède pour axe de symétrie la médiatrice de AB.

Etant donné A et B, les deux autres sommets C et D sont sur une parallèle (D) à (AB), et tels que $AD = BC = \ell$, où $\ell > \text{dist}((D), AB)$ (si $\ell = \text{dist}((D), AB)$, C et D sont les projetés orthogonaux de B et A sur (D), et la figure est un rectangle.)

Il y a donc deux solutions pour C, disons C_1 et C_2, et deux solutions pour D, disons D_1 et D_2



Les triangles isocèles AD_1D_2 et BC_1C_2 ont même base et même hauteur : ils sont donc isométriques. Leurs angles à la base sont égaux, ce qui montre que leurs côtés sont parallèles. Ils sont donc image l'un de l'autre par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. En renommant éventuellement D_1, D_2 en D_2, D_1, on a $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_2C_2} = \overrightarrow{AB}$. ABC_1D_1 et ABC_2D_2 sont donc des parallélogrammes et pas des trapèzes.

D'autre part, si (Δ_1) est la médiatrice de $[D_1 D_2]$ et (Δ) celle de $[AB]$, on a que $(\Delta_1) // (\Delta)$ (car $(\Delta)_1 \perp (D) // (AB) \perp (\Delta)$), et que $(\Delta_1) \ni A$, d'où $(\Delta) = t_{\frac{\overrightarrow{AB}}{2}}(\Delta_1)$

Comme $D_1 \xmapsto{S_{\Delta_1}} D_2$ et $D_1 \xmapsto{t_{\overrightarrow{AB}}} C_1$

On a que

$$D_2 \xmapsto{S_{\Delta_1}} D_1 \xmapsto{t_{\overrightarrow{AB}}} C_1$$

Soit

$$D_2 \xmapsto{S_\Delta} C_1$$

De même $D_1 \xmapsto{S_\Delta} C_2$,

Si bien que dans un trapèze isocèle les deux bases ont même médiatrice, qui est axe de symétrie de la figure.

Il reste à montrer que O est sur cet axe. Comme O est centre d'un cercle tangent à AD et à BC, O est sur la bissectrice intérieure du secteur angulaire bordé par ces droites et contenant le trapèze, c'est-à-dire sur son axe de symétrie.

Enfin, comme K_1 est milieu de $[AB]$, et que $B = S_{(AB)}(A)$, K_1 est sur l'axe de symétrie, de même, K_3.

c. Le point de contact de $(\mathcal{C})$ avec (AB) est la projection orthogonale de O sur (AB). Comme $(OK_1) \perp (AB)$, et que $K_1 \in (AB)$, c'est K_1.

De même K_3 est le point de contact de $(\mathcal{C})$ avec (CD).

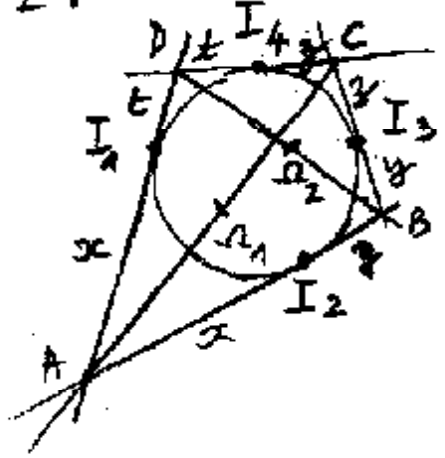
La projection sur (AD) parallèlement à (AB) du milieu O de $[K_1K_3]$ est le milieu K_4 de $[AD]$. De même, la projection sur (BC) parallèlement à (AB) de O est K_2.

Par conséquent, K_4, O et K_2 sont alignés sur une même parallèle à (AB), qui est donc invariante par la réflexion conservant $ABCD$.

Comme cette réflexion transforme (AD) en (CB), $K_4 = (AD) \cap (K_4K_2)$ est transformé en $(BC) \cap (K_4K_2)$, qui est K_2. Le milieu de K_2K_4 est donc à l'intersection de (K_2K_4) et de l'axe de la réflexion, c'est donc O.

d. En utilisant comme ci-dessus le théorème de la projection d'un milieu, on voit que $\Omega_1 = (AC) \cap K_2K_4$, et que $\Omega_2 = (BD) \cap (K_2K_4)$. Comme d'autre part (AC) et (BD) s'échangent dans la réflexion laissant invariant $ABCD$, on a que cette réflexion échange Ω_1 et Ω_2. D'où, comme ci-dessus, O est le milieu de $\Omega_1\Omega_2$.

2.



a. Les deux tangentes menées de A à $(\mathcal{C})$ déterminent des segments AI_1 et AI_2 de longueurs égales : $AI_2 = x$.

De même, $BI_3 = y$, $CI_4 = z$, $DI_1 = t$.

Si $X = \text{Bar}\{(D,x),(A,t)\}$, on a $x.\vec{DX} + t\vec{AX} = \vec{0}$, ce qui montre que $X = I_1$.

De même, $\text{Bar}\{(A,y),(B,x)\} = I_2$,

$\text{Bar}\{(B,z),(C,y)\} = I_3$

$\text{Bar}\{(C,t),(D,z)\} = I_4$.

b. $\text{Bar}\{(\Omega_1, t+y),(\Omega_2, x+z)\}$

$= \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{t+y}{2}\right),\left(C, \frac{t+y}{2}\right),\left(B, \frac{x+z}{2}\right),\left(D, \frac{x+z}{2}\right)\right\}$

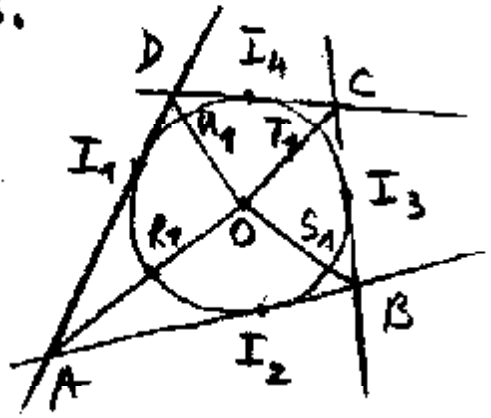
$= \text{Bar}\{(A,t+y),(C,t+y),(B,x+z),(D,x+z)\}$

$= \text{Bar}\{(A,t),(A,y),(C,t),(C,y),(B,x),(B,z),(D,x),(B,z)\}$

$= \text{Bar}\{\underbrace{(A,t),(D,x)},\underbrace{(A,y),B(x)},\underbrace{(B,z),(C,y)}\underbrace{(C,t),(B,z)}\}$

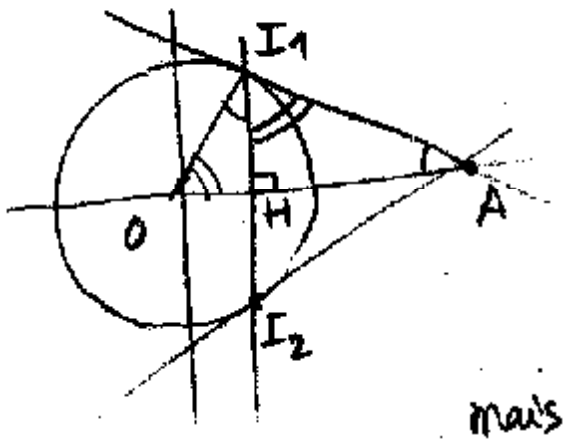
$= \text{Bar}\{(I_1, t+x), (I_2, x+y), (I_3, y+z), (I_4, z+t)\}$

3.



$$2\vec{\omega} = (x+y)\,O\vec{I}_2 + (y+z)\,O\vec{I}_3 + (z+t)\,O\vec{I}_4 + (t+x)\,O\vec{I}_1$$

$$= x(O\vec{I}_1 + O\vec{I}_2) + y(O\vec{I}_2 + O\vec{I}_3) + z(O\vec{I}_3 + O\vec{I}_4) + t(O\vec{I}_4 + O\vec{I}_1)$$



soit $H = [I_1 I_2] \cap [OA]$

Alors $(O\vec{I}_1 + O\vec{I}_2) = 2 \cdot OH \cdot \dfrac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$

mais $\dfrac{OH}{OI_1} = \dfrac{I_1 H}{A I_1}$

soit $OH = \dfrac{I_1 H}{x}$, d'où $2OH = \dfrac{I_1 I_2}{x}$

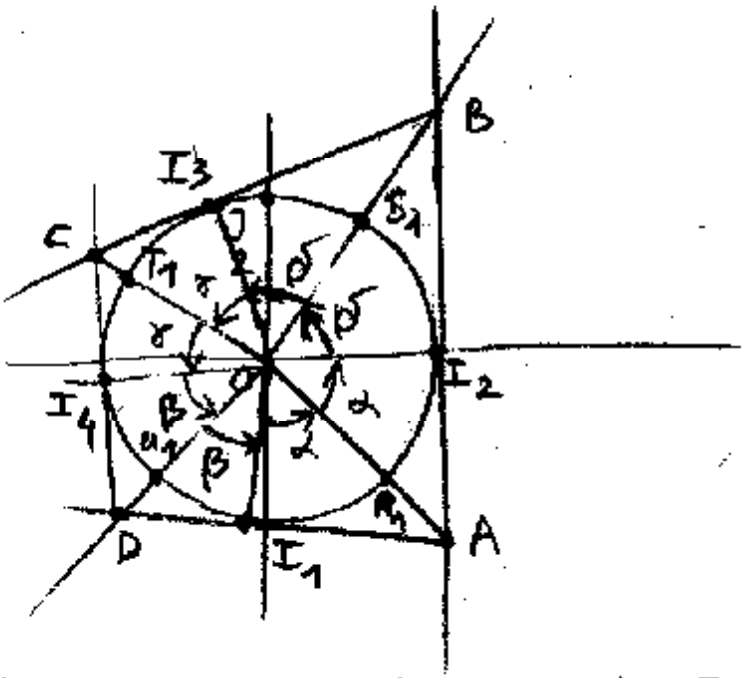
Donc

$$x(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{OI_2}) = I_1I_2 \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = I_1I_2\ \overrightarrow{OR_1}$$

De même

$y(\overrightarrow{OI_2} + \overrightarrow{OI_3}) = I_2I_3\ \overrightarrow{OS_1}$, etc., d'où le résultat demandé.

4.



a. La droite AO est bissectrice des droites $[OI_1)$ et $[OI_2)$, d'où $(\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI_2})$, etc.

D'où :

$S_1\ (e^{i\delta})$

$T_1\ (e^{i(2\delta+\gamma)})$

$U_1\ (e^{i(2\delta+2\gamma+\beta)})$

$R_1\ (e^{i(2\delta+2\gamma+2\beta+\alpha)})$

Si on a $(1, e^{-i\alpha})$ où $2\alpha+2\beta+2\delta+2\alpha = 0 \pmod{2\pi}$

Comme $I_1I_2 = 2\sin\alpha$, $I_2I_3 = 2\sin\delta$, etc., on a

$$2\theta = 2\sin\alpha \cdot e^{i(\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)} + 2\sin\delta \cdot e^{i\delta} + 2\sin\gamma \cdot e^{i(2\delta+\gamma)} + 2\sin\beta\, e^{i(2\gamma+2\delta+\beta)}$$

Mais $2\sin\alpha\, e^{i\alpha} = 2\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$= \sin 2\alpha + i(1-\cos 2\alpha)$

$= i - i(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$

$= i - i\, e^{2i\alpha}$

Si bien que

$$\theta = (i - i e^{2i\alpha})\, e^{2i(\beta+\gamma+\delta)} + (i - i e^{2i\delta}) + (i - i e^{2i\gamma})\, e^{2i\delta} + (i - i e^{2i\beta})\, e^{2i(\gamma+\delta)}$$

$$= i\left[e^{2i(\beta+\gamma+\delta)} - e^{2i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} + 1 - e^{2i\delta} + e^{2i\delta} - e^{2i(\gamma+\delta)} + e^{2i(\gamma+\delta)} - e^{2i(\beta+\gamma+\delta)}\right]$$

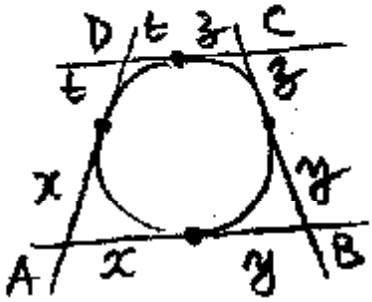
$$= i\left[-e^{2i(\beta+\gamma+\delta+\alpha)} + 1\right] = 0 \text{ car } 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \pmod{2\pi}$$

Par définition de $\vec{\omega}$, si X est le barycentre de $\{(\Omega_1, t+y), (\Omega_2, x+z)\}$

$\overrightarrow{OX} = 2\vec{\omega}$.

On a donc que $X = O$.

c. Si ABCD est un trapèze isocèle, on a



$x + t = z + y$

le barycentre X est donc un milieu -

D'où O milieu de $\Omega_1\Omega_2$.